Homogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2y'' + C_1y' + C_0y = 0.$$

Homogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2 y'' + C_1 y' + C_0 y = 0.$$

Definujeme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

Homogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2 y'' + C_1 y' + C_0 y = 0.$$

Definujeme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

Charakteristický polynom rozložíme na součin kořenových činitelů:

- reálné kořeny $\to (\lambda - a)^k$
- komplexní kořeny $\to (\lambda - b)^k(\lambda - \overline{b})^k$

Homogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + C_2y'' + C_1y' + C_0y = 0.$$

Definujeme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

Charakteristický polynom rozložíme na součin kořenových činitelů:

- reálné kořeny $\to (\lambda - a)^k$
- komplexní kořeny $\to (\lambda - b)^k(\lambda - \overline{b})^k$

Najdeme fundamentální systém řešení:

- $(\lambda - a)^k \to \{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{k-1}e^{ax}\}$
- $(\lambda-b)^k(\lambda-\overline{b})^k \to \begin{array}{l}\{\cos(\beta x)e^{\alpha x}, x\cos(\beta x)e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}\cos(\beta x)e^{\alpha x},\\ \sin(\beta x)e^{\alpha x}, x\sin(\beta x)e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}\sin(\beta x)e^{\alpha x}\},\end{array}$

  kde $b = \alpha + \beta i$ ($\overline{b} = \alpha - \beta i$).

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{3y}' + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{3y}' + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\rightarrow \{e^x, e^{2x}\} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Ae^x} + \mathbf{Be^{2x}}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y''} - \mathbf{3y'} + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\rightarrow \{e^x, e^{2x}\} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Ae^x} + \mathbf{Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y''} + \mathbf{6y'} + \mathbf{9y} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y'' - 3y' + 2y = 0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y = Ae^x + Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y'' + 6y' + 9y = 0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{3y}' + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^x} + \mathbf{Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{6y}' + \mathbf{9y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^{-3x}} + \mathbf{Bxe^{-3x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{3y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 3 = (\lambda - \sqrt{3}i)(\lambda + \sqrt{3}i)$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y'' - 3y' + 2y = 0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y = Ae^x + Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y'' + 6y' + 9y = 0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}}$$

$$\mathbf{y'' + 3y = 0} \to \lambda^2 + 3 = (\lambda - \sqrt{3}i)(\lambda + \sqrt{3}i)$$
$$\to \{\cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\} \to \mathbf{y = A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{3y}' + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^x} + \mathbf{Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{6y}' + \mathbf{9y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^{-3x}} + \mathbf{Bxe^{-3x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{3y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 3 = (\lambda - \sqrt{3}i)(\lambda + \sqrt{3}i)$$
$$\to \{\cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\} \to \mathbf{y} = \mathbf{A}\cos(\sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{x}) + \mathbf{B}\sin(\sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y}'''' + \mathbf{8y}'' + \mathbf{16y} = \mathbf{0} \to \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{3y}' + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^x} + \mathbf{Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{6y}' + \mathbf{9y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y} = \mathbf{Ae^{-3x}} + \mathbf{Bxe^{-3x}}$$

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{3y} = \mathbf{0} \to \lambda^2 + 3 = (\lambda - \sqrt{3}i)(\lambda + \sqrt{3}i)$$
$$\to \{\cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\} \to \mathbf{y} = \mathbf{A\cos(\sqrt{3}x)} + \mathbf{B\sin(\sqrt{3}x)}$$

$$\mathbf{y}'''' + \mathbf{8y}'' + \mathbf{16y} = \mathbf{0} \to \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2$$
$$\to \{\cos(2x), x\cos(2x), \sin(2x), x\sin(2x)\}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y'' - 3y' + 2y = 0} \to \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$\to \{e^x, e^{2x}\} \to \mathbf{y = Ae^x + Be^{2x}}$$

$$\mathbf{y'' + 6y' + 9y = 0} \to \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$
$$\to \{e^{-3x}, xe^{-3x}\} \to \mathbf{y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}}$$

$$\mathbf{y'' + 3y = 0} \to \lambda^2 + 3 = (\lambda - \sqrt{3}i)(\lambda + \sqrt{3}i)$$
$$\to \{\cos(\sqrt{3}x), \sin(\sqrt{3}x)\} \to \mathbf{y = A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)}$$

$$\mathbf{y'''' + 8y'' + 16y = 0} \to \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2$$
$$\to \{\cos(2x), x\cos(2x), \sin(2x), x\sin(2x)\}$$
$$\to \mathbf{y = A\cos(2x) + Bx\cos(2x) + C\sin(2x) + Dx\sin(2x)}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\to \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\to \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$
$$\to \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}\}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$

$$\rightarrow \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$

$$\rightarrow \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}\}$$

$$\rightarrow \mathbf{y = A + Bx + Ce^{2x} + Dxe^{2x} + Ex^2e^{2x}}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\to \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$
$$\to \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}\}$$
$$\to \mathbf{y = A + Bx + Ce^{2x} + Dxe^{2x} + Ex^2e^{2x}}$$

$$\mathbf{y''' - y'' - 3y' + 27y = 0}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\to \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$
$$\to \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$$
$$\to \mathbf{y = A + Bx + Ce^{2x} + Dxe^{2x} + Ex^2e^{2x}}$$

$$\mathbf{y''' - y'' - 3y' + 27y = 0}$$
$$\to \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 27 = (\lambda - (2 + \sqrt{5}i))(\lambda - (2 - \sqrt{5}i))(\lambda + 3)$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\rightarrow \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^3$$
$$\rightarrow \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$$
$$\rightarrow \mathbf{y = A + Bx + Ce^{2x} + Dxe^{2x} + Ex^2e^{2x}}$$

$$\mathbf{y''' - y'' - 3y' + 27y = 0}$$
$$\rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 27 = (\lambda - (2 + \sqrt{5}i))(\lambda - (2 - \sqrt{5}i))(\lambda + 3)$$
$$\rightarrow \{\cos(\sqrt{5}x)e^{2x}, \sin(\sqrt{5}x)e^{2x}, e^{-3x}\}$$

Homogenní rovnice - příklady

$$\mathbf{y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0}$$
$$\to \lambda^5 - 6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^3$$
$$\to \{1, x, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$$
$$\to \mathbf{y = A + Bx + Ce^{2x} + Dxe^{2x} + Ex^2e^{2x}}$$

$$\mathbf{y''' - y'' - 3y' + 27y = 0}$$
$$\to \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 27 = (\lambda - (2+\sqrt{5}i))(\lambda - (2-\sqrt{5}i))(\lambda+3)$$
$$\to \{\cos(\sqrt{5}x)e^{2x}, \sin(\sqrt{5}x)e^{2x}, e^{-3x}\}$$
$$\to \mathbf{y = A\cos(\sqrt{5}x)e^{2x} + B\sin(\sqrt{5}x)e^{2x} + Ce^{-3x}}$$

Nehomogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2y'' + C_1y' + C_0y = f(x).$$

Nehomogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2y'' + C_1y' + C_0y = f(x).$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y = y_p + y_h,$$

kde

- y_p je nějaké řešení nehomogenní rovnice,
- y_h je obecné řešení homogenní rovnice.

Nehomogenní rovnice

Řešíme rovnici

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2y'' + C_1y' + C_0y = f(x).$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y = y_p + y_h,$$

kde

- y_p je nějaké řešení nehomogenní rovnice,
- y_h je obecné řešení homogenní rovnice.

Na nalezení y_p máme dvě základní metody, metodu speciální pravé strany a metodu variace konstant.

Speciální pravá strana

Hledáme nějaké řešení rovnice
$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2 y'' + C_1 y' + C_0 y = f(x)$.

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x},$$

kde P a Q jsou polynomy.

Speciální pravá strana

Hledáme nějaké řešení rovnice
$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_2 y'' + C_1 y' + C_0 y = f(x)$.

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x},$$

kde P a Q jsou polynomy.

y_p pak hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k R(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + x^k S(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x},$$

kde $\deg R, \deg S \leq \max(\deg P, \deg Q)$ a k je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ v odpovídajícím charakteristickém polynomu.

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x, \quad Q(x) = 0.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x, \quad Q(x) = 0.$$

Pro ověření:

$$x \cdot \cos(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x} + 0 \cdot \sin(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x} = xe^{-x}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x, \quad Q(x) = 0.$$

Pro ověření:

$$x \cdot \cos(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x} + 0 \cdot \sin(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x} = xe^{-x}.$$

Dále $-1 + 0 \cdot i = -1$ není kořenem charakteristického polynomu.
Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$(Ax + B)e^{-x} = x^0(Ax + B)\cos(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x} + x^0(Cx + D)\sin(0 \cdot x)e^{-1 \cdot x}$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y''' + 4y'' + 4y' = (x+3)e^{-2x}$.

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y''' + 4y'' + 4y' = (x+3)e^{-2x}$.

$p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -2, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x + 3, \quad Q(x) = 0.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y''' + 4y'' + 4y' = (x+3)e^{-2x}$.

$p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -2, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x+3, \quad Q(x) = 0.$$

Pro ověření:

$$(x+3)\cdot\cos(0\cdot x)e^{-2\cdot x} + 0\cdot\sin(0\cdot x)e^{-2\cdot x} = (x+3)e^{-2x}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y''' + 4y'' + 4y' = (x+3)e^{-2x}$.

$p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = -2, \quad \beta = 0, \quad P(x) = x+3, \quad Q(x) = 0.$$

Pro ověření:

$$(x+3)\cdot\cos(0\cdot x)e^{-2\cdot x} + 0\cdot\sin(0\cdot x)e^{-2\cdot x} = (x+3)e^{-2x}.$$

Dále -2 je kořenem charakteristického polynomu násobnosti 2.
Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$(Ax^3+Bx^2)e^{-2x} = x^2(Ax+B)\cos(0\cdot x)e^{-2\cdot x} + x^2(Cx+D)\sin(0\cdot x)e^{-2\cdot x}$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = \sin(3x)e^{5x}$.

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = \sin(3x)e^{5x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 5, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = 1.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = \sin(3x)e^{5x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 5, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = 1.$$

Pro ověření:

$$0 \cdot \cos(3 \cdot x)e^{5 \cdot x} + 1 \cdot \sin(3 \cdot x)e^{5 \cdot x} = \sin(3x)e^{5x}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = \sin(3x)e^{5x}$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 5, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = 1.$$

Pro ověření:

$$0 \cdot \cos(3 \cdot x)e^{5 \cdot x} + 1 \cdot \sin(3 \cdot x)e^{5 \cdot x} = \sin(3x)e^{5x}.$$

Dále $5 + 3i$ není kořenem charakteristického polynomu.
Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$A\cos(3x)e^{5x} + B\sin(3x)e^{5x}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = x^2\sin(3x)$.

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = x^2 \sin(3x)$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x^2.$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = x^2 \sin(3x)$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x^2.$$

Pro ověření:

$$0 \cdot \cos(3 \cdot x)e^{0 \cdot x} + x^2 \cdot \sin(3 \cdot x)e^{0 \cdot x} = x^2 \sin(3x).$$

Speciální pravá strana - příklady

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

Hledáme nějaké řešení rovnice $y'' + 9y = x^2 \sin(3x)$.

$p(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$ a speciální tvar odpovídá

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x^2.$$

Pro ověření:

$$0 \cdot \cos(3 \cdot x)e^{0 \cdot x} + x^2 \cdot \sin(3 \cdot x)e^{0 \cdot x} = x^2 \sin(3x).$$

Dále $3i$ je kořenem charakteristického polynomu násobnosti 1.
Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\cos(3x) + (Dx^3 + Ex^2 + Fx)\sin(3x)$$
$$= x^1(Ax^2 + Bx + C)\cos(3 \cdot x)e^{0 \cdot x} + x^1(Dx^2 + Ex + F)\sin(3 \cdot x)e^{0 \cdot x}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1 + 3\cos(x)$.

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1 + 3\cos(x)$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici $y^{(4)} + 4y'' = 0$.

Charakterictický polynom: $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Fundamentální systém: $\{1, x, \sin(2x), \cos(2x)\}$

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = A + Bx + C\sin(2x) + D\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1 + 3\cos(x)$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici $y^{(4)} + 4y'' = 0$.

Charakterictický polynom: $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Fundamentální systém: $\{1, x, \sin(2x), \cos(2x)\}$

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = A + Bx + C\sin(2x) + D\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$

Pravá strana není ve speciálním tvaru, ale můžeme řešit dvě rovnice

$$y^{(4)} + 4y'' = 3\cos(x)$$

a

$$y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$$

Obě už pravou stranu ve speciálním tvaru mají. Pokud $y_{p,1}$ je řešením první rovcnice a $y_{p,2}$ řešením druhé, potom $y_{p,1} + y_{p,2}$ je řešením rovnice původní (to je důsledek linearity).

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 3\cos(x)$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P(x) = 3,\ Q(x) = 0$.

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 3\cos(x)$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P(x) = 3,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 3\cos(x)$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P(x) = 3,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Máme

$$\begin{aligned}
y''_{p,1}(x) &= -A\cos(x) - B\sin(x),\\
y^{(4)}_{p,1}(x) &= A\cos(x) + B\sin(x),\\
y^{(4)}_{p,1}(x) + 4y''_{p,1}(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) - 4A\cos(x) - 4B\sin(x)\\
&= -3A\cos(x) - 3B\sin(x)
\end{aligned}$$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 3\cos(x)$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P(x) = 3,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Máme

$$\begin{aligned} y''_{p,1}(x) &= -A\cos(x) - B\sin(x), \\ y^{(4)}_{p,1}(x) &= A\cos(x) + B\sin(x), \\ y^{(4)}_{p,1}(x) + 4y''_{p,1}(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) - 4A\cos(x) - 4B\sin(x) \\ &= -3A\cos(x) - 3B\sin(x) \end{aligned}$$

Porovnáním s pravou stanou dostáváme

$$-3A\cos(x) - 3B\sin(x) = 3\cos(x) \implies -3A = 3,\ -3B = 0.$$

Tedy $A = -1,\ B = 0$ což dává $y_{p,1}(x) = -\cos(x)$.

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám
$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P(x) = x^2 - 1,\ Q(x) = 0.$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám
$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P(x) = x^2 - 1,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,2}(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám
$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P(x) = x^2 - 1,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,2}(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Máme

$$\begin{aligned} y''_{p,2}(x) &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ y^{(4)}_{p,2}(x) &= 24A, \\ y^{(4)}_{p,1}(x) + 4y''_{p,1}(x) &= 24A + 48Ax^2 + 24Bx + 8C \end{aligned}$$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Charakterictický polynom: $\lambda^2(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$

Pravá stana odpovídá hodnotám
$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P(x) = x^2 - 1,\ Q(x) = 0.$

Partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru $y_{p,2}(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Máme

$$\begin{aligned} y''_{p,2}(x) &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ y^{(4)}_{p,2}(x) &= 24A, \\ y^{(4)}_{p,1}(x) + 4y''_{p,1}(x) &= 24A + 48Ax^2 + 24Bx + 8C \end{aligned}$$

Porovnáním s pravou stanou dostáváme

$$48Ax^2 + 24Bx + 24A + 8C = x^2 - 1$$
$$\implies 48A = 1,\ 24B = 0,\ 24A + 8C = -1$$

Tedy

$$A = \frac{1}{48},\ B = 0,\ C = -\frac{3}{16}, \quad \text{což dává} \quad y_{p,2}(x) = \frac{x^4}{48} - \frac{3x^2}{16}.$$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = A + Bx + C\sin(2x) + D\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$

Speciální pravá strana - příklady

Hledáme nějaké řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = A + Bx + C\sin(2x) + D\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení

$$y_{p,1}(x) = -\cos(x),$$
$$y_{p,2}(x) = \frac{x^4}{48} - \frac{3x^2}{16},$$
$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = -\cos(x) + \frac{x^4}{48} - \frac{3x^2}{16}.$$

Obecné řešení má tedy tvar

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\cos(x) + \frac{x^4}{48} - \frac{3x^2}{16} + A + Bx + C\sin(2x) + D\cos(2x),$$

$x \in \mathbb{R}$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Variace konstant - rovnice 1. řádu

Nejprve se podívejme na obecnou lineární rovnici 1. stupně, tj. rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Variace konstant - rovnice 1. řádu

Nejprve se podívejme na obecnou lineární rovnici 1. stupně, tj. rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$, kde $A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Variace konstant - rovnice 1. řádu

Nejprve se podívejme na obecnou lineární rovnici 1. stupně, tj. rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$, kde $A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Pro ověření $y_h'(x) + a(x)y_h(x) = -a(x)Ce^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$.

Variace konstant - rovnice 1. řádu

Nejprve se podívejme na obecnou lineární rovnici 1. stupně, tj. rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$, kde $A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.
Pro ověření $y_h'(x) + a(x)y_h(x) = -a(x)Ce^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$.

Při variaci konstant přeměníme konstantu C na funkci $C(x)$ a hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$.

Variace konstant - rovnice 1. řádu

Nejprve se podívejme na obecnou lineární rovnici 1. stupně, tj. rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$, kde $A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.
Pro ověření $y_h'(x) + a(x)y_h(x) = -a(x)Ce^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0.$

Při variaci konstant přeměníme konstantu C na funkci $C(x)$ a hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$.
Jednoduché derivování dává $y_p'(x) = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)}$.
Tedy

$$\begin{aligned} b(x) &= y_p'(x) + a(x)y_p(x) \\ &= C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} \\ &= C'(x)e^{-A(x)} \end{aligned}$$

A $C(x) \stackrel{c}{=} \int b(x)e^{A(x)}\,dx \quad (= B(x)).$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Charakterictický polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$

Fundamentální systém: $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Charakterictický polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$

Fundamentální systém: $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}.$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Nejprve řešíme homogenní rovnici $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Charakterictický polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$

Fundamentální systém: $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}.$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Trik: položíme $C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} = 0$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Trik: položíme $C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} = 0$.

To dává $y_p'(x) = -2C(x)e^{-2x} - D(x)e^{-x}$

a $y_p''(x) = -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Trik: položíme $C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} = 0$.

To dává $y_p'(x) = -2C(x)e^{-2x} - D(x)e^{-x}$

a $y_p''(x) = -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x}$.

Tedy

$$
\begin{aligned}
\sqrt{e^x + 1} &= y_p''(x) + 3y_p'(x) + 2y_p(x) \\
&= -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x} \\
&\quad -6C(x)e^{-2x} - 3D(x)e^{-x} + 2C(x)e^{-2x} + 2D(x)e^{-x}
\end{aligned}
$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Trik: položíme $C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} = 0$.

To dává $y_p'(x) = -2C(x)e^{-2x} - D(x)e^{-x}$

a $y_p''(x) = -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x}$.

Tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x + 1} &= y_p''(x) + 3y_p'(x) + 2y_p(x) \\ &= -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x} \\ &\quad -6C(x)e^{-2x} - 3D(x)e^{-x} + 2C(x)e^{-2x} + 2D(x)e^{-x}\end{aligned}$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Platí $y_p'(x) = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$.

Trik: položíme $C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} = 0$.

To dává $y_p'(x) = -2C(x)e^{-2x} - D(x)e^{-x}$

a $y_p''(x) = -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x}$.

Tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{e^x + 1} &= y_p''(x) + 3y_p'(x) + 2y_p(x) \\
&= -2C'(x)e^{-2x} + 4C(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x} \\
&\quad -6C(x)e^{-2x} - 3D(x)e^{-x} + 2C(x)e^{-2x} + 2D(x)e^{-x} \\
&= -2C'(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x}
\end{aligned}$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.
Platí

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} &= 0, \\ -2C'(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} &= \sqrt{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Což dává $-C'(x)e^{-2x} = \sqrt{e^x + 1}$ a $D'(x)e^{-x} = \sqrt{e^x + 1}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.
Platí

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} &= 0, \\ -2C'(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} &= \sqrt{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Což dává $-C'(x)e^{-2x} = \sqrt{e^x + 1}$ a $D'(x)e^{-x} = \sqrt{e^x + 1}$.

$$\begin{aligned} -\int e^{2x}\sqrt{e^x + 1}\, dx &= \left| \begin{matrix} t = e^x + 1 \\ dt = e^x\, dx \end{matrix} \right| = -\int (t-1)\sqrt{t}\, dt \\ &= -\int -t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\, dt \stackrel{c}{=} -\frac{2}{5}(e^x + 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^{-x}$.
Platí

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-2x} + D'(x)e^{-x} &= 0, \\ -2C'(x)e^{-2x} - D'(x)e^{-x} &= \sqrt{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Což dává $-C'(x)e^{-2x} = \sqrt{e^x + 1}$ a $D'(x)e^{-x} = \sqrt{e^x + 1}$.

$$\begin{aligned} -\int e^{2x}\sqrt{e^x + 1}\, dx &= \begin{vmatrix} t = e^x + 1 \\ dt = e^x\, dx \end{vmatrix} = -\int (t-1)\sqrt{t}\, dt \\ &= -\int -t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\, dt \stackrel{c}{=} -\frac{2}{5}(e^x + 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$\int e^x\sqrt{e^x + 1}\, dx = \begin{vmatrix} t = e^x + 1 \\ dt = e^x\, dx \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}\, dt \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^x$,

Spočítali jsme $C(x) = -\dfrac{2}{5}(e^x + 1)^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad D(x) = \dfrac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}}$.

Variace konstant - vyšší řády

Řešme rovnici $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:
$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}, \ x \in \mathbb{R}, \ A, B \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = C(x)e^{-2x} + D(x)e^x$,

Spočítali jsme $C(x) = -\frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}, \quad D(x) = \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-2x} + \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}(e^{-2x} + e^{-x}) + Ae^{-2x} + Be^{-x} \\
&= -\frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-2x} + \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}(1 + e^x)e^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{-x} \\
&= \frac{4}{15}(e^x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{-x},
\end{aligned}
$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $A, B \in \mathbb{R}$.